3.2. Descrierea interna a sistemelor multivariabile

3.2.1.1. Ecuatii vectorial matriceale de stare ale sistemelor multivariabile netede

Metoda variabilelor de stare permite aproximarea comportarii dinamice a unei largi clase de sisteme. Aceasta metoda se aplica si pentru analiza sistemelor liniare multivariabile cu parametri concentrati (invariante în timp).

Exemplul 3.4. Se considera un **motor de curent continuu cuexcitatie separata, comandat pe indus si inductor**, fig. 3.18.

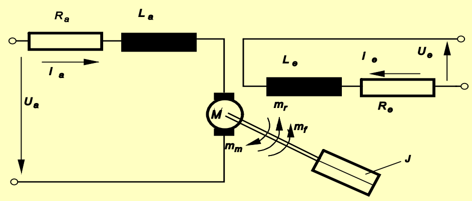

Fig. 3.19

Functionarea motorului este descrisa de urmatoarele ecuatii

- ecuatia de tensiuni a indusului

$$u_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e\,; \qquad (3.123)$$

- ecuatia de tensiuni a inductorului

$$u_e = R_e i_e + L_e \frac{di_e}{dt}\,; \qquad (3.124)$$

- ecuatia de echilibru a cuplurilor

$$m_m = m_r + m_f + J\frac{d\omega}{dt}\,; \qquad (3.125)$$

- **caracteristica neliniara a dependentei fluxului magnetic** inductor φ de curentul de excitatie i_e, $\boldsymbol{\varphi(i_e)}$.

Tensiunea electromotoare indusa e, cuplul electromagnetic m_m si cuplul de frecari m_f se determina cu relatiile

$$e = k\varphi\omega; \; m_m = k\varphi i_a; \; m_f = k_f\,\omega \qquad (3.126)$$

unde k si k_f sunt constante de proportionalitate.

În regim stationar, toate marimile sunt constante si ecuatiile (3.123) - (3.126) devin

$$U_a = R_a I_a + E \;, E = k\phi\Omega$$
$$U_e = R_e I_e \qquad (3.127)$$
$$M_m = k\phi I_a = M_r + M_f \;, M_f = k_f \Omega .$$

În regimurile tranzitorii, fiecare marime x variaza în jurul valorii stationare X cu o mica variatie Δx

$$x = X + \Delta x . \qquad (3.128)$$

De exemplu $u_a = U_a + \Delta u_a$, $i_a = I_a + \Delta i_a$, $\omega = \Omega + \Delta\omega$, etc.

În expresiile tensiunii electromotoare induse *e* si a cuplului electromagnetic m_m apar produse de variabile :

$$e = k\,\varphi\omega = k(\phi + \Delta\varphi)(\Omega + \Delta\omega) =$$
$$= k\,\phi\,\Omega + k\,\phi\,\Delta\omega + k\,\Omega\,\Delta\varphi + k\Delta\varphi\,\Delta\omega \cong E + k\,\phi\,\Delta\omega + k\Omega\,\Delta\varphi \qquad (3.129)$$

$$m_m = k\,\varphi\, i_a = k(\,\phi + \Delta\varphi)(\,I_a + \Delta i_a) =$$
$$= k\,\phi\, I_a + k\,\phi\,\Delta i_a + k\, I_a\,\Delta\varphi + k\,\Delta\varphi\,\Delta i_a \cong M_m + k\,\phi\,\Delta i_a + k\, I_a\,\Delta\varphi . \qquad (3.130)$$

În relatiile (3.129), (3.130) s-au neglijat produsele micilor variatii $\Delta\varphi\Delta\omega \approx 0$; $\Delta\varphi\Delta i_a \approx 0$.

Se considera ca variatia fluxului de excitatie $\Delta\varphi$ este proportionala cu variatia curentului de excitatie Δi_e

$$\Delta\varphi = k_1\,\Delta i_e . \qquad (3.131)$$

Tinând seama de relatiile (3.127) - (3.131) pentru mici variatii ale marimilor care intervin, ecuatiile (3.123) - (3.125) devin

$$\Delta u_a = R_a \Delta i_a + L_a \frac{d\Delta i_a}{dt} + k\Omega\, k_1 \Delta i_e + k\phi \Delta\omega \qquad (3.132)$$

$$\Delta u_e = R_e \Delta i_e + L_e \frac{d\Delta i_e}{dt} \qquad (3.133)$$

$$k\,\phi\,\Delta i_a + k\,I_a\,k_1 \Delta i_e = \Delta m_r + k_f\,\Delta\omega + J\,\frac{d\Delta\omega}{dt} \qquad (3.134)$$

Se aleg ca variabile de stare variaţiile mărimilor ce intervin prin derivatele lor în ecuaţiile (3.132) - (3.134)

$$x_1 = \Delta i_a\,;\, x_2 = \Delta i_e\,;\, x_3 = \Delta\omega\ . \qquad (3.135)$$

Ca mărimi de intrare (de comandă) se consideră variaţiile tensiunilor aplicate indusului Δu_a şi inductorului Δu_e. Variaţia cuplului rezistent Δm_r (mărimea perturbatoare) se consideră nulă.

$$u_1 = \Delta u_a\,;\, u_2 = \Delta u_e\,;\, u_3 = \Delta m_r = 0\ . \qquad (3.136)$$

Cu notaţiile (3.135), (3.136) ecuaţiile (3.132) - (3.134) constituie ecuaţiile intrare-stare ale motorului de curent continuu şi pot fi aduse la forma

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\frac{R_a}{L_a}x_1 - \frac{k\,\Omega\,k_1}{L_a}x_2 - \frac{k\,\phi}{L_a}x_3 + \frac{1}{L_a}u_1\\
\dot{x}_2 &= -\frac{R_e}{L_e}x_2 + \frac{1}{L_e}u_2\\
\dot{x}_3 &= \frac{k\,\phi}{J}x_1 + \frac{k\,I_a\,k_1}{J}x_2 - \frac{k_f}{J}x_3\,.
\end{aligned} \qquad (3.137)$$

Se consideră mărimi de ieşire variaţiile curenţilor din indus Δi_a, din inductor Δi_e şi variaţia turaţiei $\Delta\omega$

$$y_1 = \Delta i_a\,,\, y_2 = \Delta i_e\,,\, y_3 = \Delta\omega\,. \qquad (3.138)$$

Ecuaţiile (3.137) şi (3.138) se pot scrie sub formă matriceală

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{3.139}$$

unde *x* $\in$ ***R***^{3} *este vectorul mărimilor de stare; u* $\in$ ***R***^{2} - vectorul mărimilor de comandă; *y* $\in$ ***R***^{3} - vectorul mărimilor de ieşire.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}; \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \tag{3.140}$$

unde *A* $\in$ ***R***^{3x3} este matricea de evoluţie a sistemului; *B* $\in$ ***R***^{3x2} - matricea de comandă; *C* $\in$ ***R***^{3x3} - matricea de ieşire.

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_a}{L_a} & -\dfrac{k\Omega k_1}{L_a} & -\dfrac{k\Phi}{L_a} \\ 0 & -\dfrac{R_e}{L_e} & 0 \\ \dfrac{k\Phi}{J} & \dfrac{kI_a k_1}{J} & -\dfrac{k_f}{J} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{L_e} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.141}$$

Deci motorul de curent continuu comandat pe indus şi inductor este un sistem caracterizat de ecuaţiile vectorial-matriceale intrare-stare-ieşire (3.139) - (3.141) şi poate fi reprezentat prin schema din fig. 3.19.

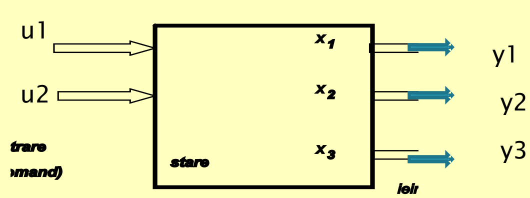

Fig. 3.19

În cazul general, un sistem liniar multivariabil continuu în timp poate fi reprezentat prin ecuaţiile vectorial matriceale de stare de forma

$$\dot{x} = Ax + Bu$$ **ecuaţia intrare-stare,** (3.142)

$$y = Cx + Du$$ **ecuaţia** de ieşire (3.143)

$x(\tau)$ - condiţie iniţială dată

cu $x \in \boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{R}^n$ - *vectorul de stare (n x 1)*; $u \in \boldsymbol{U} \in \boldsymbol{R}^m$ - vectorul de intrare, *(m x 1)*; $y \in \boldsymbol{Y} \in \boldsymbol{R}^p$ - *vectorul de ieşire, (p x 1)*; $A \in \boldsymbol{R}^{nxn}$ - matricea de evoluţie (matricea de stare), *(n x n)*; $B \in \boldsymbol{R}^{nxm}$ - matricea de comandă (de intrare), *(n x m)*; $C \in \boldsymbol{R}^{pxn}$ - matricea de ieşire, *(p x n)*;
$D \in \mathbf{R}^{pxm}$ - matricea de cuplaj, *(p x m)*; *x(τ)* - vectorul condiţiilor iniţiale *(n x 1)*;

Se observă că
a) ecuaţiile de stare au aceeaşi structură atât pentru sistemele monovariabile cât şi pentru sistemele multivariabile;
b) mărimile de ieşire depind liniar de variabilele de stare şi de intrare;
c) ecuaţiile (3.143) se pot reprezenta prin schema bloc din fig. 3.20, unde $u_i(t)$, $x_j(t)$ şi $y_l(t)$ corespund respectiv evoluţiei unei intrări, a unei stări şi a unei ieşiri oarecare;

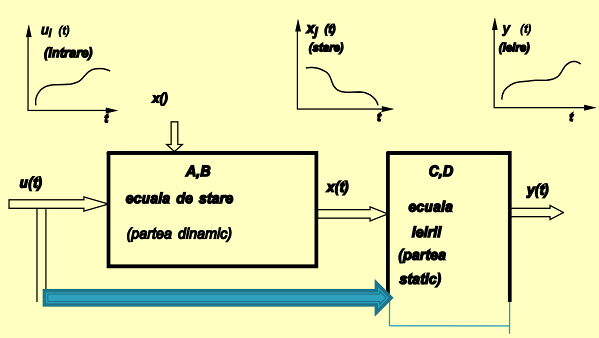

Fig. 3.20

3.2.1.2. Ecuaţia omogenă. Matricea de tranziţie

Ecuaţia omogenă corespunzătoare ecuaţiei de stare (3.142) este de forma

$$\dot{x}(t) = A\,x(t)\,. \tag{3.144}$$

Fie *M(t)* o matrice pătratică *(n x n)* constituită din coloanele $M^{[1]}$, $M^{[2]}$, ..., $M^{[n]}$ care satisface ecuaţia de stare omogenă (3.144)

$$\dot{M}(t) = AM(t) \tag{3.145}$$

Fiecare coloană $M^{[i]}$ verifică de asemenea ecuaţia omogenă

$$\dot{M}^{[i]} = A\,M^{[i]}\,. \tag{3.146}$$

Determinantul matricei *M* este presupus diferit de zero

$$det\,M \neq 0\,. \tag{3.147}$$

Matricea *M(t)* se numeşte ***matrice-soluţie*** **sau *matrice fundamentală.***

Se consideră o schimbare a vectorului de stare definită de relaţia

$$x(t) = M(t)\,\tilde{x}(t)\,. \tag{3.148}$$

unde *x(t)* este soluţia ecuaţiei omogene (3.144).

Din această ecuaţie rezultă

$$\dot{M}(t)\,\tilde{x}(t) + M(t)\,\dot{\tilde{x}}(t) = A\,M(t)\,\tilde{x}(t) \tag{3.149}$$

Ţinând seama că $\dot{M}(t) = AM(t)$ din (3.149) se obţine

$$M(t)\,\dot{\tilde{x}}(t) = 0\,. \tag{3.150}$$

Deoarece $det\,M \neq 0$ rezultă $\dot{\tilde{x}}(t) = 0\,.$ (3.151)

Deci $\tilde{x}(t)$ este un vector constituit din constante arbitrare, $\tilde{x}(t)$ este un vector constant

$$\tilde{x}(t) = c = \text{constant} \qquad (3.152)$$

Relaţia (3.148) devine acum

$$x(t) = M(t)c\,. \qquad (3.153)$$

Din (3.153) rezultă că *x(t)*, **soluţia generală a ecuaţiei omogene de stare**, este o **combinaţie liniară a coloanelor matricei *M(t)* cu coeficienţi arbitrari**.

Coloanele matricei *M(t)* sunt liniar independente şi **formează un *sistem fundamental de soluţii***.

Se consideră o matrice soluţie *Φ(t,τ)* astfel ca

$$\phi(\tau,\tau) = I\,,\, \dot{\phi}(t,\tau) = A\phi(t,\tau)\,. \qquad (3.154)$$

Deoarece *det Φ(τ,τ) = 1*, **coloanele matricei *Φ(t,τ)* sunt liniar independente** (constituie un sistem fundamental de soluţii) şi **soluţia ecuaţiei omogene (3.144) este**

$$x(t) = \phi(t,\tau)\,c\,. \qquad (3.155)$$

Impunând ca acestă soluţie să satisfacă condiţiile iniţiale *x(τ),* din (3.154), (3.155) se obţine

$$x(\tau) = \phi(\tau,\tau)\,c = c\,. \qquad (3.156)$$

Ca urmare soluţia particulară a ecuaţiei omogene (3.144) definită prin condiţii iniţiale este

$$x(t) = \phi(t,\tau)\,x(\tau)\,. \qquad (3.157)$$

Soluţia ecuaţiei omogene reprezintă componenta liberă $x_l(t)$ a funcţiei de tranziţie a stărilor sistemului (când $u(t) = 0$, $t \geq \tau$).

Matricea $\Phi(t,\tau)$ care exprimă componenta liberă $x_l(t)$ în funcţie de condiţiile iniţiale se numeşte ***matrice de tranziţie*.**

Fiecărui **termen Φ_{ij} al matricei de tranziţie** i se poate atribui un anumit **sens fizic**. Se presupune că vectorul condiţiilor iniţiale $x(\tau)$ are numai linia i diferită de zero

$$x_1(\tau)=0,\, x_2(\tau)=0,\, x_i(\tau)=1,\, \ldots,\, x_n(\tau)=0$$

$$x(\tau)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} linia\, i\,. \qquad (3.158)$$

Atunci relaţia (3.157) devine

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \ldots \\ x_i(t) \\ \ldots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) & \ldots & \phi_{1i}(t) & \ldots & \phi_{1n}(t) \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) & \ldots & \phi_{2i}(t) & \ldots & \phi_{2n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \phi_{i1}(t) & \phi_{i2}(t) & \ldots & \phi_{ii}(t) & \ldots & \phi_{in}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \ldots & \phi_{ni} & \ldots & \phi_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{1i}(t) \\ \phi_{2i}(t) \\ \ldots \\ \phi_{ii}(t) \\ \ldots \\ \phi_{ni}(t) \end{bmatrix} \qquad (3.159)$$

Relaţia (3.159) arată că un element oarecare Φ_{ki}, $k=\overline{1,n}$ al matricei de tranziţie reprezintă regimul liber al varabilei de stare $x_k(t)$ $k=\overline{1,n}$ în condiţiile

$$x_1(\tau)=0,\; x_2(\tau)=0,\; x_i(\tau)=1,\; x_{i+1}(\tau)=0,\; \ldots,\; x_n(\tau)=0;\; i=\overline{1,n}$$

Pentru sistemele dinamice liniare invariante în timp, aşa cum s-a arătat şi în capitolul *1* (relaţia 1.196) matricea de tranziţie *Φ(t,τ)* satisface relaţiile

$$\phi(t,\tau)=\phi(t-\tau,0)=\phi(0,\tau-t). \qquad (3.160)$$

Matricea de tranziţie *Φ(t-τ,0)* a sistemului invariant (3.142), (3.143) se exprimă cu ajutorul funcţiei de matrice de forma $e^{A(t-\tau)}$ denumită şi eponenţială matricială

$$\phi(t-\tau,0)=e^{A(t-\tau)} \qquad (3.161)$$

Demonstraţie Datorită invarianţei în timp matricea soluţie satisface relaţia

$$\phi(t,\tau)=\phi(t-\tau,0)=M(t-\tau). \qquad (3.162)$$

Se alege matricea soluţie *M(t-τ)* sub forma unei serii de puteri

$$M(t-\tau)=I+M_1(t-\tau)+M_2(t-\tau)^2+....+M_k(t-\tau)^k. \qquad (3.163)$$

unde *I* este matricea unitate.

Dar matricea *M(.)* satisface ecuaţia omogenă (3.145). Introducând *M(t-τ)* din (3.163) în (3.145) se obţine

$$\begin{aligned}&M_1+2M_2(t-\tau)+...+kM_k(t-\tau)^{k-1}=\\&=A+AM_1(t-\tau)+AM_2(t-\tau)^2+...+AM_k(t-\tau)^k\end{aligned} \qquad (3.164)$$

Prin identificare rezultă matricele $M_1, M_2, ..., M_k$

$$M_1=A$$

$$M_2=\frac{AM_1}{2}=\frac{A^2}{2!}$$

$$M_3 = \frac{AM_2}{3} = \frac{A^3}{3!}$$

$$\vdots \qquad (3.165)$$

$$M_k = \frac{AM_{k-1}}{k} = \frac{A^k}{k!}.$$

Înlocuind matricele $M_1, M_2, ..., M_k$ din (3.165) în (3.163) se observă că matricea soluţie $M(t-\tau)$ este o serie infinită de puteri care se poate reprezenta prin funcţia exponentială matriceală $e^{A(t-\tau)}$:

$$M(t-\tau) = I + A(t-\tau) + \frac{A^2(t-\tau)^2}{2!} + ... + \frac{A^n(t-\tau)^n}{n!} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i(t-\tau)^i}{i!} = e^{A(t-\tau)}. \qquad (3.166)$$

Fiind dat că $\Phi(\tau,\tau) = \Phi(0,0) = M(0) = I$, din (3.162), (3.166) rezultă (3.161), q.e.d.

Soluţia ecuaţiei omogene (3.144) pentru sisteme invariante în timp devine

$$x(t) = \Phi(t-\tau, 0)\, x(\tau) = e^{A(t-\tau)} x(\tau). \qquad (3.167)$$

Matricea de tranziţie explicitează funcţia de tranziţie a stărilor, pentru $\omega = 0$

$$x(t) = \varphi(t,\tau,x,0) = \Phi(t,\tau)\, x(\tau) = \Phi(t-\tau,0)\, x(\tau) \qquad (3.168)$$

Ca urmare, **matricea de tranziţie satisface proprietăţile funcţiei de tranziţie a stărilor**

a) proprietatea de directivitate, conform căreia matricea de tranziţie $\Phi(t-\tau,0)$ este definită pentru orice $t \geq \tau$.

b) proprietatea de consistenţă. Conform acestei proprietati rezulta

$$\varphi(\tau,\tau,x,0) = \Phi(\tau - \tau,0)\, x(\tau) = x(\tau)$$

$$respectiv \qquad (3.169)$$

$$\Phi(0,0) = e^{A(\tau - \tau)} = I\ .$$

c) Proprietatea de compozabilitate

Pentru $t_1 < t_2 < t_3$ rezultă că

$$\phi(t_3 - t_1,0) = \phi(t_3 - t_2,0)\,\phi(t_2 - t_1,0)$$

$$e^{A(t_3 - t_1)} = e^{A(t_3 - t_2)}\, e^{A(t_2 - t_1)} \qquad (3.170)$$

O consecinţă a proprietăţii de compozabilitate este relaţia

$$\Phi(t-\tau,0)\Phi(\tau-t,0) = I; \quad e^{A(t-\tau)}e^{A(\tau-t)} = I \qquad (3.171)$$

care se obtine formal din (3.170) pentru $t_3 = t_1 = t$ si $t_2 = \tau$.

Din (3.171) rezulta imediat

$$\Phi(t-\tau,0) = \Phi^{-1}(\tau-t,0); \quad e^{A(t-\tau)} = e^{-A(\tau-t)} \qquad (3.172)$$

Matricea de tranzitie satisface ecuatiile

$$\dot{\Phi}(t-\tau,0) = A\Phi(t-\tau,0) = I; \quad (e^{A(t-\tau)})' = Ae^{A(t-\tau)}$$

$$\dot{\Phi}(t-\tau,0) = \Phi(t-\tau,0)A = I; \quad (e^{A(t-\tau)})' = e^{A(t-\tau)}A \qquad (3.173)$$

Aceste ecuatii se verifica usor utilizând dezvoltarea în serie de puteri a matricei de tranzitie data de (3.161), (3.166).

3.2.1.3. Determinarea matricei de tranzitie $e^{A(t-\tau)}$

Matricea de tranzitie se utilizeaza pentru determinarea raspunsurilor temporale ale sistemelor netede. Ea îndeplineste acelasi rol ca si functia pondere în cazul sistemelor monovariabile descrise în limbaj intrare-iesire.

Metode pentru determinarea matricei de tranzitie $e^{A(t-\tau)}$

a) dezvoltarea în serie a exponentialei matriceale;
b) aplicarea teoremei Cayley-Hamilton;
c) transformata Laplace inversa;
d) diagonalizarea matricei de stare.

Se va considera momentul initial τ egal cu 0, pentru simplificarea scrierii.

a) Dezvoltarea în serie

Pentru orice matrice patratica *A* se poate scrie

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \ldots = \sum_{i=0}^{n} \frac{A^i t^i}{i!} \quad (3.175)$$

Pentru fiecare valoare a lui *t* se poate evalua expresia (3.175) printr-o suma finita de *k* termeni;
Elementele matricei rezultat obtinuta sunt numere si nu expresii analitice.

b) Aplicarea teoremei Cayley - Hamilton

Aplicând transformata Laplace în ecuatia omogena (3.144) cu conditii initiale *x(τ)* se obtine

$$sX(s) - x(\tau)e^{-s\tau} = AX(s) \quad (3.176)$$

$$(sI - A)X(s) = x(\tau)e^{-s\tau} \qquad (3.176)$$

Daca *det(sI - A)* $\neq$ *0 din (3.176) rezulta*

$$X(s) = (sI - A)^{-1}e^{-s\tau}x(\tau) \qquad (3.177)$$

Matricea $$sI - A \qquad (3.178)$$

se numeste **matricea caracteristica** *asociata sistemului dinamic* (3.142), (3.143).

Polinomul de grad *n, Δ(s) se numeste* ***polinom caracteristic.***

$$\Delta(s) = \det(sI - A) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0 \quad (3.179)$$

Ecuatia $$\Delta(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0$$

se numeste ***ecuatie caracteristica*.**

Radacinile ecuatiei caracteristice se numesc ***valori proprii*** (sau caracteristice) **ale matricei *A*.**

Teorema Cayley-Hamilton - enunt

Orice matrice patratica de ordin *n* satisface propria sa ecuatie caracteristica, adica

$$\Delta(A) = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0 \qquad (3.181)$$

în care *I* = A^0, iar *O* este matricea nula.

Cunoscând *A*, A^2, ..., $A^{(n-1)}$, *se poate calcula matricea A la orice putere* intreaga

$$A^n = -(\alpha_{n-1}A^{n-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I) = \alpha_{n-1}^0 A^{n-1} + \ldots + \alpha_1^0 A + \alpha_0^0 I$$

$$A^{n+1} = AA^n = -(\alpha_{n-1}A^n + \alpha_{n-2}A^{n-1} + \ldots + \alpha_1 A^2 + \alpha_0 A) =$$

$$= \alpha_{n-1}^1 A^{n-1} + \alpha_{n-2}^1 A^{n-2} + \ldots + \alpha_1^1 A + \alpha_0^1 I$$

si pentru *r = n + q > n , q = 1, 2,...*

$$A^r = A^{n+q} = \alpha_{n-1}^q A^{n-1} + \alpha_{n-2}^q A^{n-2} + ... + \alpha_1^q A + \alpha_0^q I \quad (3.183)$$

Orice functie de matrice patratica sub forma unei serii de puteri, deci si functia e^{At} (3.175) se poate exprima sub forma unei combinatii liniare a matricelor $I, A, A^2, ..., A^{(n-1)}$

$$f(A) = e^{At} = \beta_0 I + \beta_1 A + \beta_2 A^2 + ... + \beta_{n-1} A^{n-1} \quad (3.184)$$

Coeficientii $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{n-1}$ sunt functii de timp

Fie λ_k , k=1,...,n, valorile proprii distincte ale matricei *A.* Se demonstreaza ca orice valoare proprie λ_k verifica ecuatia (3.184). Adica

$$f(\lambda_k) = e^{\lambda_k t} = \beta_0 + \beta_1 \lambda_k + \beta_2 \lambda_k^2 + ... + \beta_{n-1} \lambda_k^{n-1}; \quad k = \overline{1,n}$$

(3.185)

Se obtine în acest fel un sistem de *n* ecuatii algebrice liniare cu *n* necunoscute: $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{n-1}$.

Sub forma matriceala acest sistem devine

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \lambda_{n-1} & \lambda_{n-1}^2 & \cdots & \lambda_{n-1}^{n-1} \\ 1 & \lambda_n & \lambda_{n1}^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \cdots \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \\ e^{\lambda_{n-1} t} \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (3.186)$$

Determinantul matricei din (3.186) este diferit de zero (este un determinant Vandermonde) daca valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sunt distincte. În acest caz sistemul (3.186) are solutie unica.

Exemplul 3.5. Sa se determine *f(A)* = e^{At} pentru sistemul cu matricea *A*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Deoarece *n = 2, n-1 = 1* si, conform teoremei Cayley-Hamilton, se poate scrie

$$f(A) = e^{At} = \beta_0 I + \beta_1 A$$

$$\det(sI - A) = \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ -2 & s-4 \end{bmatrix} = s^2 - 5s + 6 = 0$$

Aceasta ecuatie are solutiile $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, care sunt valorile proprii ale matricei *A.*

Sistemul (3.186) devine în acest caz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{aligned} \beta_0 + 2\beta_1 &= e^{2t} \\ \beta_0 + 3\beta_1 &= e^{3t} \end{aligned}$$

si are solutiile $\beta_0 = 3e^{2t} - 2e^{3t}; \quad \beta_1 = e^{3t} - e^{2t}$

si atunci

$$f(A) = e^{At} = (3e^{2t} - 2e^{3t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^{3t} - e^{2t}) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{2t} - e^{3t} & e^{2t} - e^{3t} \\ 2(-e^{2t} + e^{3t}) & -e^{2t} + 2e^{3t} \end{bmatrix}$$

Daca **matricea *A* are valori proprii multiple** atunci **determinantul Vandermonde al matricei sistemului (3.186) are linii identice**. Acest **determinant este nul** si din (3.186) **nu se obtin solutii unice** pentru β_0, β_1, ..., β_{n-1}
.

Fie λ_1 o **valoare proprie de multiplicitate *q* a matricei *A*.** Atunci **λ_1 va fi radacina si pentru *f(λ_1)*** si **pentru derivatele acestei functii pâna la ordinul *q-1* .**
Cele *q* linii corespunzatoare valorii proprii λ_1 din matricea sistemului (3.186) se completeaza astfel: pe prima linie se trec coeficientii termenilor cu necunoscutele $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ ai functiei $f(\lambda_1)$, pe a doua linie se trec coeficientii functiei $df(\lambda_1)/d\lambda_1$ si asa mai departe, pe linia *q* se trec coeficientii functiei

$$\frac{d^{q-1} f(\lambda_1)}{d\lambda_1^{q-1}}$$

În membrul drept din (3.186) aceleasi linii se completeaza respectiv cu: $f(\lambda_1)$, $df(\lambda_1)/d\lambda_1, \ldots,$ $d^{q-1} f(\lambda_1) / d\lambda_1^{q-1}$

Exemplul 3.6. Sa se determine $f(A) = e^{At}$ pentru un sistem cu o matrice *A* de ordin 4.

care admite o valoare proprie λ_1 de ordin de multiplicitate *3* si o valoare proprie simpla λ_2. Conform teoremei Cayley-Hamilton *f(A)* va fi de forma

$$f(A) = e^{At} = \beta_0 I + \beta_1 A + \beta_2 A^2 + \beta_3 A^3$$

$$f(\lambda_1) = e^{\lambda_1 t} = \beta_0 + \beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_1^2 + \beta_3 \lambda_1^3$$
$$\frac{df(\lambda_1)}{d\lambda_1} = te^{\lambda_1 t} = \beta_1 + 2\beta_2 \lambda_1 + 3\beta_3 \lambda_1^2$$
$$\frac{d^2 f(\lambda_1)}{d\lambda_1^2} = t^2 e^{\lambda_1 t} = 2\beta_2 + 6\beta_3 \lambda_1$$
$$f(\lambda_2) = e^{\lambda_2 t} = \beta_0 + \beta_1 \lambda_2 + \beta_2 \lambda_2^2 + \beta_3 \lambda_2^3$$

Ca urmare sistemul (3.186) devine în acest caz de forma

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & 3\lambda_1^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6\lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ te^{\lambda_1 t} \\ t^2 e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

Din acest sistem se determina coeficientii β_0, β_1, β_2, β_3 care se înlocuiesc în expresia functiei *f(A)*.

c) Utilizarea transformatei Laplace inversa pentru determinarea matricei de tranzitie

Aplicând transformata Laplace directa ecuatiei omogene (3.144) se obtine ecuatia (3.177) în care se pune în evidenta matricea

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} e^{-s\tau} = \frac{adj(sI - A)}{\Delta(s)} e^{-s\tau} \qquad (3.188)$$

care se numeste ***matrice rezolvanta*** a sistemului (3.142), (3.143).

Matricea rezolvanta este **transformata Laplace directa a matricei de tranzitie a** acestui sistem, adica

$$\Phi(s) = L\{\Phi(t-\tau, 0)\} = L\{e^{A(t-\tau)}\} \qquad (3.189)$$

Din (3.188) rezulta ca elementele matricei $(sI - A)^{-1}$ sunt functii rationale cu numitorul de grad *n* si numaratorul de grad cel mult *n - 1*.

Aplicând transformata Laplace inversa în (3.177), tinând seama de (3.188) si de solutia (3.167) a ecuatiei omogene, rezulta

$$\Phi(t-\tau,0)=e^{A(t-\tau)}=L^{-1}\{\Phi(s)\}=L^{-1}\{(sI-A)^{-1}e^{-s\tau}\} \quad (3.190)$$

Deci, matricea de tranzitie se obtine calculând matricea *(sI -A)*$^{-1}$*,* inversa matricei *(sI – A).*

Exemplul 3.7. Utilizând transformata Laplace inversa sase determine matricea de tranzitie pentru sistemul cu matricea de evolutie *A*

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & -3\end{bmatrix}$$

Se determina *(sI - A)*$^{-1}$ care este de forma

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}(s+1)(s+2) & (s+3) & 1\\ 0 & s(s+3) & s\\ 0 & -2s & s^2\end{bmatrix}$$

Pentru *τ = 0*, calculând originalul fiecarui element al matricei *(sI - A)*$^{-1}$ se obtine matricea de tranzitie e^{At}

$$e^{At}=L^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}=\begin{bmatrix}1 & \frac{3}{2}-2e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t} & \frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\\ 0 & 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ 0 & -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

Algoritmul lui Leverrier (metoda lui Fadeev)

Algoritmul lui Leverrier (sau metoda lui Fadeev) permite, cunoscând matricea *A*, sa se calculeze expresia matriceala *(sI - A)*$^{-1}$ sub forma polinomiala, fara sa se efectueze inversa matricei.

Principiul metodei

Se scrie

$$(sI-A)^{-1}=\frac{adj(sI-A)}{\Delta(s)}=\frac{B(s)}{\Delta(s)}$$

$$B(s) = B_{n-1}s^{n-1} + .B_{n-2}s^{n-2} + .. + B_1 s + B_0 \qquad (3.192.)$$

B(s) este un polinom de matrici.

Δ(s) este un polinom de grad *n*, egal cu ordinul matricei *A*, dat de relatia (3.180). Scopul algoritmului este **de a calcula** într-un **mod recursiv coeficientii** ***α***α_i, *i = 0, 1, ..., (n-1)* ai polinomului caracteristic si **matricele** B_i, *i = 0, 1, ..., (n-1)*, componente ale matricei adjuncte *adj (sI – A) cu relatiile de recurenta*

$$\begin{array}{llll}
 & B_{n-1} = I & & \alpha_{n-1} = -tr(AB_{n-1}) = -tr(A) \\
 & B_{n-2} = AB_{n-1} + I\alpha_{n-1} & & \alpha_{n-2} = -\frac{1}{2}tr(AB_{n-2}) \\
(a) & B_{n-3} = AB_{n-2} + I\alpha_{n-2} & b) & \alpha_{n-3} = -\frac{1}{3}tr(AB_{n-3}) \\
 & B_{n-i} = AB_{n-i+1} + I\alpha_{n-i+1} & & \alpha_{n-i} = -\frac{1}{i}tr(AB_{n-i} \\
 & B_0 = AB_1 + I\alpha_1 & & \alpha_1 = -\frac{1}{n-1}tr(AB_1) \\
 & & & \alpha_0 = -\frac{1}{n}tr(AB_0)
\end{array} \qquad (3.193)$$

(3.195)Deci

$$Bi = AB_{i+1} + I\alpha_{i+1}; \quad i < n-1, \quad B_{n-1} = I$$
$$\alpha_i = -\frac{1}{n-i}tr(AB_i), \quad i \le n-1 \qquad (3.194)$$

În relatiile (3.193), (3.194) **tr(.)** este **urma unei matrice**, adica **suma elementelor sale diagonale**.

Relatiile (3.193.*a*) se obtin din relatia (3.191) care are forma:

$$B(s) = B_{n-1}s^{n-1} + .B_{n-2}s^{n-2} + .. + B_1 s + B_0 = (sI - A)^{-1}\Delta(s) \qquad (3.195)$$

Amplificând în (3.195) la stânga cu *(sI - A)* si înlocuind *Δ(s)* din (3.180) rezulta

$$(sI - A)(B_{n-1}s^{n-1} + .B_{n-2}s^{n-2} + .. + B_1 s + B_0) = I(s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + ... + \alpha_1 s + \alpha_0) \qquad (3.196)$$

Efectuând în (3.196) înmultirile si identificând dupa puterile lui *s* se obtine sirul de egalitati

$$
\begin{aligned}
&B_{n-1} = I\\
&-AB_{n-1} + B_{n-2} = I\alpha_{n-1}\\
&-AB_{n-2} + B_{n-3} = I\alpha_{n-2} \qquad (3.197)\\
&-------------\\
&-AB_1 + B_0 = I\alpha_1\\
&-AB_0 = I\alpha_0
\end{aligned}
$$

Exemplul 3.8. Se considera matricea *A* utilizata si în exemplul precedent

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Să se calculeze $(sI - A)^{-1}$ aplicând algoritmul Lever-rier-Fadeev. Calculul este uşor, ordinul *n* fiind aici egal cu *3*. Se scrie succesiv

$$B_2 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \alpha_2 = -tr\,(AB_2) = -tr \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} = 3$$

$$B_1 = AB_2 + I\alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \alpha_1 = -\frac{1}{2} tr\,(AB_1) = -\frac{1}{2} tr \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 2$$

$$B_0 = AB_1 + I\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \alpha_0 = -\frac{1}{3} tr\,(AB_0) = -\frac{1}{3} tr \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Rezultă deci

$$(sI - A)^{-1} = \frac{B(s)}{\Delta(s)} = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 2s} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

După efectuarea calculelor se obţine aceeaşi expresie pentru $(sI - A)^{-1}$ indicată în exemplul 3.7.